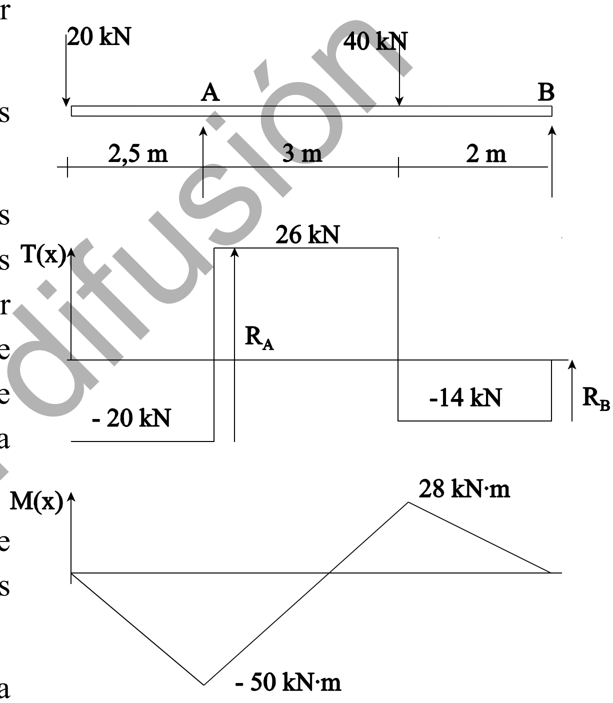
$$T(x) = -14 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_X = 0 \qquad 20 \text{ kN} \cdot x + R_A\,(x-2{,}5) + 40 \text{ kN}\,(x - 5{,}5) + M(x) = 0$$

$$M(x) = -14\,x + 105 \text{ kN·m}$$



Obtenidas las leyes ya podemos representar los diagramas correspondientes.

Para representar las funciones de esfuerzos internos se debe partir del sólido libre.

Existe la posibilidad de realizar algunas **comprobaciones** en la obtención de las leyes de variación de esfuerzos. En primer lugar debemos recordar que T(x) es la derivada de M(x) [algunas veces los criterios de signos de otros libros indican que es igual a la derivada cambiada de signo]

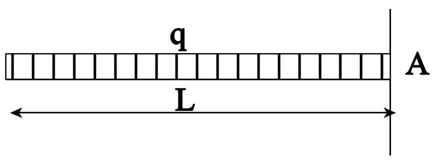
Los valores del momento en los apoyos donde no está impedido el giro, debe ser cero, es decir, M(0) = M(7,5) = 0

Cuando aparece una fuerza puntual provoca una discontinuidad en la función de igual valor. Si se aplica un momento puntual ocurre lo mismo sobre su función.

La función T(x) no comienza en 0, debido a que existe una fuerza puntual en el voladizo. Sin embargo, si es cero en el apoyo B. El momento es siempre 0 en los voladizos y en los apoyos. Sólo en los empotramientos existe reacción de momento.

En la representación del esfuerzo cortante podemos apreciar como en x = 2,5 m (apoyo A), la función pasa del valor -20 kN al de 26 kN. La diferencia entre estos valores corresponde con el valor de la reacción en A. lo mismo ocurre con la reacción B en su apoyo.

13. Dibujar los diagramas de cortadura y de momento flector para el voladizo de luz L = 10 m con carga uniformemente repartida q = 1.200 kg/m.



Solución

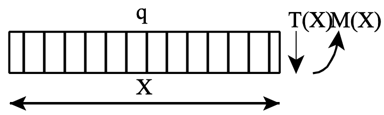
Para determinar la ley de cortantes y flectores sólo es necesario un corte. Para una sección a una distancia x del extremo libre, establecemos el equilibrio de fuerzas verticales y de momentos (tomados en la sección).

$\Sigma F_y = 0$ $\quad q \cdot x + T(x) = 0$

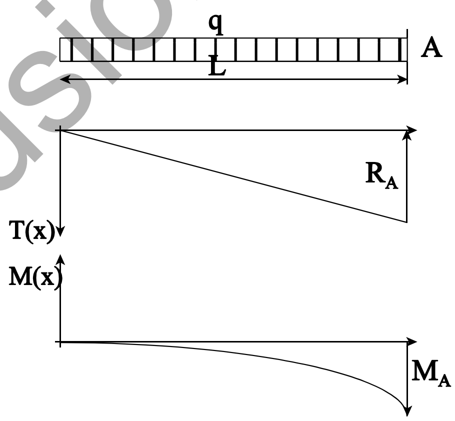
$T(x) = -q \cdot x = - 1.200\ x$

$\Sigma M_x = 0$ $\quad q \cdot x \cdot x/2 + M(x) = 0$

$M(x) = -q \cdot x^2/2 = - 600\ x^2$



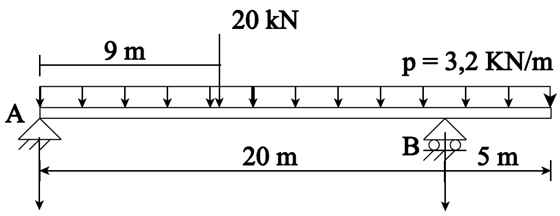
Podemos comprobar que el cortante y el flector son iguales a cero en el extremo libre (siempre que no haya ninguna carga), además, el cortante es igual a la derivada del momento. También es importante resaltar que no ha sido necesario conocer las reacciones en el empotramiento. El valor de éstas se puede obtener para x = L = 10 m.



$T(x = 10\ m) = -12.000\ kg$

$M(x = 10\ m) = -60.000\ kg{\cdot}m$

14. La viga de la figura soporta una carga uniforme de 3,2 kN/m y una carga concentrada de 20 kN. Representar el diagrama de esfuerzos internos y dimensionar la viga teniendo en cuenta que $\sigma_{adm} = 24.000\ N/cm^2$. Suponer un perfil cuadrado.



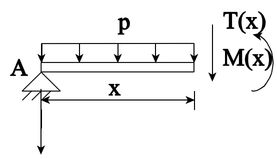
Solución

Comenzamos calculando el valor de las reacciones en los apoyos tomando momentos en ellos. Recordamos que una carga uniforme equivale a una carga puntual P = p · l, cuyo punto de aplicación se encuentra en el centro de l.

$\Sigma M_A = 0$ $\quad 20\ kN{\cdot}9\ m + 3,2\ kN/m{\cdot}25\ m{\cdot}25/2\ m + R_B \cdot 20\ m = 0$ $\quad R_B = - 59\ kN$ ( )

$\Sigma M_B = 0$ $\quad - 20\ kN{\cdot}11\ m - 3,2\ kN/m{\cdot}25\ m{\cdot}7,5\ m + R_A{\cdot}20\ m = 0$ $\quad R_A = - 41\ kN$ ( )

Para que la viga quede definida hemos de realizar tres secciones.

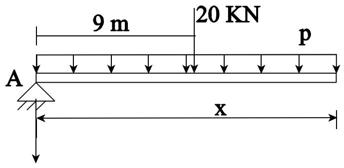


Sección 1 $\quad 0 < x < 9$

$\Sigma F_Y = 0$ $\quad R_A + p \cdot x + T(x) = 0$ $\quad T(x) = -3,2\ x + 41$

$\Sigma M_X = 0$ $\quad R_A \cdot x + p \cdot x^2/2 + M(x) = 0$ $\quad M(x) = -1,6\ x^2 + 41\ x$

Sección 2 $\quad 9 < x < 20$

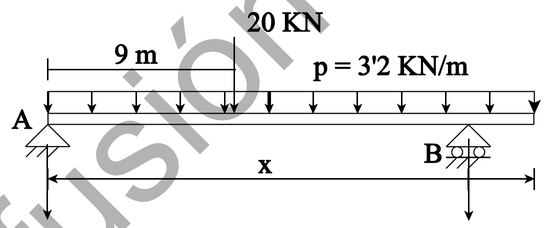


$\Sigma F_Y = 0 \qquad R_A + p \cdot x + 20 + T(x) = 0$

$T(x) = -3{,}2\ x + 21$

$\Sigma M_X = 0 \qquad R_A \cdot x + p \cdot x^2/2 + 20 \cdot (x - 9) + M(x) = 0$

$M(x) = -1{,}6\ x^2 + 21\ x + 180$



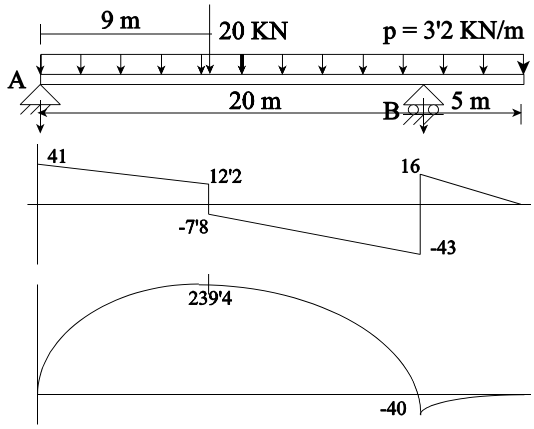
Sección 3 $\quad 20 < x < 25$

$\Sigma F_Y = 0 \qquad R_A + p \cdot x + 20 + R_B + T(x) = 0$

$T(x) = -3{,}2\ x + 80$

$\Sigma M_X = 0 \qquad R_A \cdot x + p \cdot x^2/2 + 20 \cdot (x - 9) + R_B\ (x - 20) + M(x) = 0$

$M(x) = -1{,}6\ x^2 + 80\ x - 1000$



Una vez conocidos las leyes de variación de esfuerzos en el interior de la viga podemos representar estas funciones.

Una forma práctica de hacerlo consiste en realizar los siguientes pasos. Primero se obtienen los valores de las variables T y M en los extremos de cada intervalo. Segundo, teniendo en cuenta el tipo de función de que se trata se representa una recta horizontal, una recta inclinada, una parábola o una función de tercer grado. Tercero, se determina el punto en el que T(x) se hace cero, para así calcular Mmáx, necesario en caso de dimensionar la viga.

Para dimensionar la viga hemos de saber en que punto de la viga se produce el máximo momento flector. Este punto es fácil de determinar; o bien tiene lugar en los extremos de la viga o se trata de un máximo relativo. En este caso, la derivada tiene que tomar el valor 0 en ese punto. Al ser la derivada de M(x), T(x), sólo tenemos que igualar a cero la función T(x) o, si ya tenemos dibujado el diagrama, hacer notar en qué punto T(x) se hace 0. En este caso ocurre en x = 9 m y el valor del flector será:

$$M(x=9) = -1{,}6 \cdot 9^2 + 41 \cdot 9 = 239{,}4\ \text{kN·m}$$

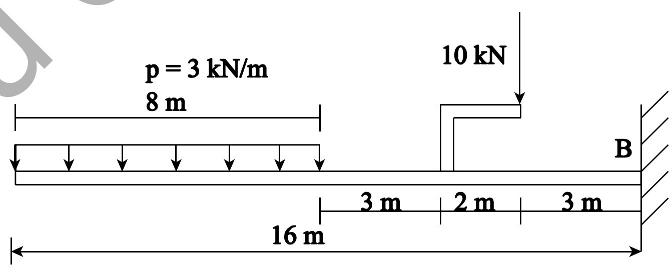
Para dimensionar la viga es necesario conocer las características estáticas de la sección de la viga (dimensiones que determinan el área, el momento de inercia, el módulo resistente, etc.). Para estos casos es habitual el uso de tablas. Sólo en secciones simples es fácil realizar el cálculo de manera directa.

Todo flector origina una tensión normal que depende del valor del flector, de la distancia a la fibra neutra y el momento de inercia. La máxima tensión se produce en la fibra más alejada de la fibra neutra ($y_{máx} = l/2$)

$$\sigma = \frac{M_{max} \bullet y}{I} = \frac{239.400\,\text{Nm} \bullet \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} l^4}$$

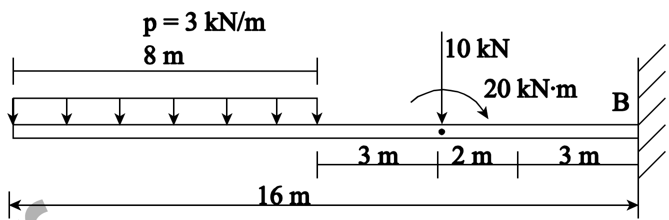
Despejando se obtiene l = 18,16 cm

15. Dibujar la ley de flectores y cortantes de la viga representada para las cargas dadas.



Solución.

En primer lugar, vamos a sustituir la carga puntual de 10 kN por una fuerza y un momento, dado que ésta no está aplicada directamente sobre la viga. El valor de la fuerza es el mismo, y el del momento aplicado en el punto marcado será el producto de la fuerza por la distancia de giro (2 metros). Así, el diagrama de cargas queda como indica la figura.



Tampoco en este caso es necesario calcular previamente las reacciones en el empotramiento, puesto que podemos analizar la viga desde el extremo libre. Serán necesarias tres secciones para definir el estado tensional de la barra.

En este caso ya no es necesario introducir N(x) puesto que al no existir cargas horizontales su valor será nulo.

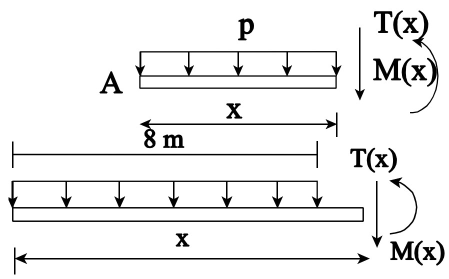
Sección 1 $\quad 0 < x < 8$

$\Sigma F_Y = 0 \qquad p \cdot x + T(x) = 0$

$T(x) = -\,p \cdot x = -3\,x$

$\Sigma M_X = 0 \qquad p \cdot x^2/2 + M(x) = 0$

$M(x) = -1{,}5\,x^2$



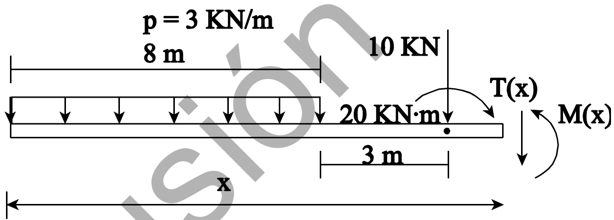
Sección 2 $\quad 8 < x < 11$

$\Sigma F_Y = 0 \qquad p \cdot 8 + T(x) = 0$

$T(x) = -24$ kN

$\Sigma M_X = 0 \qquad (p \cdot 8) \cdot (x-4) + M(x) = 0$

$M(x) = -24x + 96$



Sección 3 $\quad 11 < x < 16$

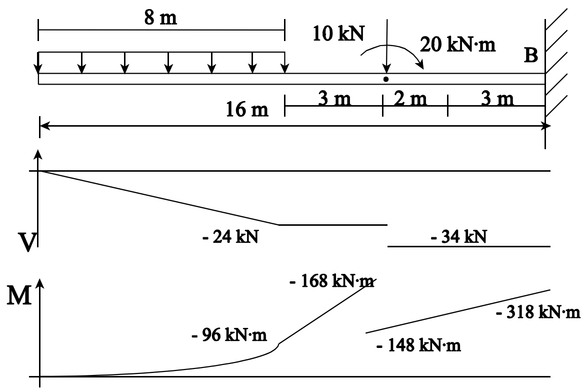
$\Sigma F_Y = 0 \qquad p \cdot 8 + 10 + T(x) = 0$

$T(x) = -34$ kN

$\Sigma M_X = 0 \qquad (p \cdot 8) \cdot (x-4) - 20 + 10 \cdot (x - 11) + M(x) = 0$

$M(x) = -34x + 226$

Para representar las leyes de esfuerzos hemos de obtener los valores en los extremos de cada intervalo en cada función.



Podemos apreciar que la función momento ha sido representada con los valores negativos por encima del eje horizontal. Esto suele ser habitual en estructuras.

$T(0) = 0$	$T(8) = -24$ kN
$T(8) = -24$ kN	$T(11) = -24$kN
$T(11) = -34$ kN	$T(16) = -34$ kN
$M(0) = 0$	$M(8) = -96$ kN·m
$M(8) = -96$ kN·m	$M(11) = -168$ kN·m
$M(11) = -148$ kN·m	$M(16) = -318$ kN·m

Podemos observar que las cargas puntuales producen una discontinuidad en la gráfica de cortante, mientras que las cargas uniformes originan rectas.

El momento es lineal para cargas puntuales y parabólico cuando la carga es uniforme; las discontinuidades en la gráfica son provocadas por momentos puntuales.

16. La viga de la figura se encuentra sometida a flexión pura, tipo viga. La fibra superior sufre una tensión de -10000 kp/cm^2, y la inferior de 5000 kp/cm^2.